FOGLIO DI ESERCIZI 2

GEOMETRIA 2 (2021-2022) - UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DOCENTI: FRANCESCO POLIZZI, TOMMASO GENTILE

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico, Y e Z sottoinsiemi di X. Dimostrare che:

(1) $\bar{\bar{Y}} = \bar{Y}$;
(2) $\overline{Y \cup Z} = \bar{Y} \cup \bar{Z}$;
(3) $\overline{Y \cap Z} \subseteq \bar{Y} \cap \bar{Z}$ (fornire un esempio in cui l'inclusione è stretta);
(4) Y è chiuso se e solo se $\partial Y \subseteq Y$.

Esercizio 2. Sia X uno spazio metrico, $Y \subset X$ un sottoinsieme e $x \in X$ un punto. Definiamo la distanza di x da Y come

$$d(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y).$$

Dimostrare che

$$\bar{Y} = \{x \in X \mid d(x, Y) = 0\}.$$

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico e $Y \subset X$ un sottoinsieme. Indichiamo con $D(Y)$ l'insieme dei punti di accumulazione di Y e con Y^* l'insieme dei suoi punti isolati. Dimostrare che

(1) $Y \cup D(Y) = Y^* \cup D(Y) = \bar{Y}$
(2) $Y^* \cap D(Y) = \emptyset$.

Esercizio 4. Sia Y un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Se Y è privo di punti isolati, dimostrare che anche $\bar{Y}$ è privo di punti isolati. Mostrare poi con un controesempio che il viceversa non è in generale vero.

Esercizio 5.

(1) Sia $Y \subseteq X$. Dimostrare che Y è denso in X se e solo se per ogni aperto non vuoto A di X si ha $A \cap Y \neq \emptyset$.
(2) Supponiamo che sia Y che il suo complementare $X - Y$ siano densi in X. Dimostrare che X non contiene punti isolati.